100 cuestiones de MATEMÁTICAS

DESCUBRE SU CARA MÁS AMABLE

Miquel Capó

CIENX100

Lectio ediciones

• *Colección Cien x 100 – 20* •

100 cuestiones de matemáticas

Descubre su cara más amable

Miquel Capó Dolz

ediciones Lectio

Primera edición: febrero de 2016

C/ Muntaner, 200, ático 8ª – 08036 Barcelona
Tel. 977 60 25 91 – 93 363 08 23
lectio@lectio.es
www.lectio.es

Diseño y composición: Imatge-9, SL

Impresión: Romanyà-Valls, SA

ISBN: 978-84-16012-42-8

DL T 11-2016

*#ORGULLOSO_DE_MIS_**MAESTROS**:*

Joan M., Joan C., Juanjo T., M. Olga B., Nuri P., Antoni J. y Claudi A.

A ellos va dedicado este libro.

ÍNDICE

Prólogo 9

I. Números y tipos de números… 11

1. Sistemas de numeración. Sistemas no posicionales 13
2. Sistemas de numeración. Sistemas posicionales 15
3. La sucesión de Fibonacci 17
4. El número áureo 19
5. Tipos de números I: números deficientes, abundantes, perfectos y amigos… 22
6. Cálculo mental y algunos trucos básicos 24
7. Las fracciones egipcias 26
8. Del 0 al 9, 10 números importantes (I) 28
9. Del 0 al 9, 10 números importantes (II) 31
10. Una parada en el camino: problemas de ingenio 34

II. Números, algunas aplicaciones y curiosidades… 37

11. Los números primos nos ayudan a comprar por Internet 39
12. Cómo multiplicar sin saberse las tablas 42
13. Un día sin números 44
14. Curiosidades numéricas 47
15. No todos los números empiezan igual. La ley de Benford 49
16. Grandes números y números pequeños 51
17. Tipos de números II: números narcisistas, OMIRP, vampiros y poligonales 54
18. Los billetes de euro y su código corrector 56
19. Los números de la mala suerte 59
20. Una parada en el camino: pasatiempos numéricos 61

III. Acercándonos al infinito… 63

21. Ajedrez y matemáticas 65
22. El infinito y los tipos de infinito 67
23. Google viene de googol 69
24. Las torres de Hanoi y la leyenda del fin del mundo 71
25. Doblando una hoja de papel: crecimiento exponencial 73

26. *Sin noticias de Gurb*: interés simple y compuesto 75
27. El Hotel Hilbert, un hotel con infinitas habitaciones 77
28. Solamente con tres cifras 79
29. El número pi y su dígito 2.000 billones 81
30. Una parada en el camino: problemas de ingenio II 82

IV. Geometría, la medida de la Tierra 85

31. Eratóstenes y el cálculo del radio de la Tierra 87
32. Embaldosando el suelo 89
33. El teorema de Pitágoras 91
34. Los tres problemas geométricos griegos: tres problemas sin solución 93
35. Un museo perfectamente vigilado 95
36. ¿A qué distancia está el horizonte? 97
37. Figuras imposibles. Engañando a nuestros sentidos 99
38. El formato DIN A-4 101
39. El símbolo del euro, geométricamente pensado 103
40. Una parada en el camino: el tangram 104

V. Historias de matemáticas y matemáticos 107

41. El último teorema de Fermat: más de 300 años para ser demostrado 109
42. Citas matemáticas 112
43. Sellos matemáticos 115
44. Las cinco matemáticas más importantes 117
45. Origen de los principales símbolos matemáticos 119
46. Los puentes de Königsberg 121
47. Pitágoras, Tales y cinco matemáticos más 124
48. A falta de premio Nobel, premios a los mejores matemáticos 126
49. Anécdotas de matemáticas y matemáticos 129
50. Una parada en el camino: problemas de ingenio III 131

VI. La probabilidad y la estadística te pueden hacer rico… 133

51. ¿Qué tenemos más opciones de ganar, la Primitiva, el Euromillones, la quiniela o el gordo de Navidad? 135
52. La paradoja de los aniversarios coincidentes 137
53. ¿Existen dos españoles con el mismo número de pelos en la cabeza? El principio del palomar 140
54. El problema de Monty Hall: un coche y dos cabras 142
55. Las matemáticas desmienten la famosa ley de Murphy 144
56. ¿Cuántos cromos tendré que comprar para completar mi colección? 146
57. La familia Pelayo o cómo ganar en los casinos 148
58. ¿Cómo podemos ser justos con una moneda injusta? 150
59. Estadística. Cómo mentir objetivamente 152
60. Una parada en el camino: el problema de la enfermedad en el monasterio 156

VII. Cultura matemática… 159

61. Arte y matemáticas 161
62. Literatura y matemáticas 163
63. El calendario juliano. ¿Cómo surgen los años bisiestos? 166
64. El calendario gregoriano. Día 15, el día después del día 4 168
65. El sistema anglosajón de unidades 170
66. El Quijote y las matemáticas 172
67. Matemáticas en *Los Simpson* 174
68. Cine y matemáticas 177
69. Una parada en el camino: problemas de pensamiento lateral 179

VIII. Aplicaciones de las matemáticas 181

70. ¿Cuántos colores necesitamos para pintar un mapa? El teorema de los cuatro colores 183
71. El método D'Hondt y otras formas de repartir escaños 185
72. El DNI y los dígitos correctores 188
73. El índice de masa corporal 190
74. Las medidas de la temperatura y sus equivalencias 192
75. El calendario perpetuo 194
76. ¿Cómo se puede calcular el día del año en que caerá el domingo de Pascua? 196
77. Algoritmos: la base de la informática 199
78. PageRank, el algoritmo de Google 201
79. La cinta de Möbius y sus aplicaciones 203
80. Una parada en el camino: tres hermanas y un piano 205

IX. Geometría aplicada 207

81. Las cónicas y sus aplicaciones 209
82. El teorema de Pick, otra forma de calcular superficies de figuras planas 212
83. ¿Cómo llenar correctamente media copa? 214
84. ¿Cómo repartir un pastel de forma justa? 216
85. Balones de fútbol: acercándonos a la esfera 218
86. El cinturón de la Tierra 220
87. Las curvas más famosas 222
88. Una parada en el camino: magia matemática 224

X. De todo un poco… 227

89. Discalculia, la dislexia matemática 229
90. La fórmula matemática más bella 231
91. Los cuadrados mágicos, los precursores de los sudokus 233
92. Paradojas y otras sorpresas matemáticas 235
93. Escogiendo acertadamente en una variante del concurso *La Voz* 237

94. Victoria asegurada: juegos con estrategia ganadora 239
95. Las ecuaciones más útiles de la historia 241
96. Las demostraciones, los pilares de las matemáticas 243
97. El problema de Langford 246
98. Los problemas del millón de dólares o cómo hacerse rico
resolviendo problemas 248
99. Para seguir pensando: problemas a la espera del genio que los resuelva… 251
100. Esto es todo, amigos. Pero vosotros podéis seguir: divulgación
matemática 253

PRÓLOGO

Las matemáticas son una ciencia que no deja indiferente a nadie, se está con ellas o contra ellas. Muchas personas les tienen un pánico irracional, posiblemente originado en su época escolar, cuando tenían que superar unos exámenes entendiesen o no lo que se les estaba explicando. Desgraciadamente, este pánico se ha universalizado tanto y se ha hecho tan "normal" que muchas personas llegan a hacer gala de su ignorancia matemática. Más de una vez he podido escuchar cosas del tipo: "Haz tú el cálculo, que yo soy de letras". Debo confesar que no puedo comprender este tipo de razonamientos. Sería como decir: "Escribe este libro tú, que yo soy de ciencias".

Otros argumentos recurrentes son: "Esto no sirve para nada", "Para hacer esto ya están los ordenadores" o "Las matemáticas son muy aburridas".

Así que, para intentar desmontar todos estos mitos y prejuicios, me he animado a escribir este libro. Por medio de 100 cuestiones el lector podrá comprobar que las matemáticas son muy útiles: son la base del buscador más famoso, Google; nos ayudan a determinar nuestro número de DNI; fijaron el calendario gregoriano; nos permiten repartir los escaños después de unas elecciones; son la base de toda la informática y la tecnología actual; nos permiten comprar con seguridad a través de Internet… Pero también pueden ser entretenidas: anécdotas de matemáticas y matemáticos, problemas de lógica e ingenio, magia matemática, problemas numéricos al estilo del famoso sudoku, etc.

Las limitaciones de espacio que me ha impuesto la editorial en el desarrollo de cada uno de los capítulos también han contribuido a sintetizar su exposición y a no hacerla innecesariamente larga o pesada. Aunque, si algún tema te interesa especialmente y quieres seguir informándote, en el blog encontrarás libros, enlaces y vídeos con los cuales podrás ampliar conocimientos:

http://www.100cuestionesdematematicas.blogspot.com.es/

Aunque cualquier error es enteramente responsabilidad mía, me gustaría agradecer a uno de mis profesores, Antoni Julià, el interés que ha demostrado y sigue demostrando por todos mis libros. Gracias a su atenta lectura y a sus correcciones y sugerencias, el libro que tienes en las manos ha mejorado respecto a la versión original. Muchas gracias, Toni.

Así pues, solamente me queda desear que este libro ponga un granito de arena en la lucha en la cual muchos matemáticos y matemáticas estamos embarcados para hacer ver que las matemáticas son mucho más que lo que se explica en los colegios e institutos.

¡Anímate a conocer la cara más amable de esta ciencia!

MIQUEL CAPÓ DOLZ
Profesor de Secundaria

I. NÚMEROS Y TIPOS DE NÚMEROS…

01 / 100

SISTEMAS DE NUMERACIÓN. SISTEMAS NO POSICIONALES

Si nos imaginamos que intentamos calcular el resultado de la suma 1.347.834 + 2.148.458 utilizando el método de numeración de un preso (es decir, contar utilizando solamente cuatro líneas verticales cruzadas por una quinta línea), de repente se nos acabarán las ganas de hacerlo y, en caso contrario, es probable que nos equivoquemos antes de obtener el resultado correcto. Por suerte, se han inventado métodos mejores que el sistema al que hemos llamado *método del preso* para representar números y para poder operar con ellos. A estos métodos se los conoce como *sistemas de numeración* y a continuación estudiaremos brevemente algunos de ellos.

Antes de seguir deberíamos dar una definición un poco más exacta de qué se entiende por *método de numeración*. En términos generales, podríamos decir que un *sistema de numeración* es un conjunto de métodos y convenciones que permiten escribir y nombrar cualquier número natural y, por extensión, el resto de números, además de operar con ellos.

Los sistemas de numeración se pueden clasificar en *posicionales* y *no posicionales*.

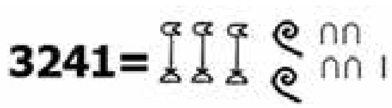
Los *sistemas no posicionales* son aquellos en los que cada número está determinado por un conjunto de símbolos cuyo valor es independiente de la posición que ocupen dentro del número.

Por el contrario, los *sistemas posicionales* son aquellos en los que el valor de cada símbolo que forma el número depende del propio símbolo y de la posición que dicho símbolo ocupe dentro del mismo.

Para poder entenderlo mejor, pondremos algunos ejemplos. Un ejemplo de sistema de numeración no posicional es el egipcio, que utilizaba los símbolos que puedes ver a continuación:

Valor	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1 millón (o infinito)
Símbolo	𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨

Así, para expresar el número 3.241 en este sistema no se tenía que hacer otra cosa que ir añadiendo (sumando) los símbolos adecuados hasta obtener el valor en cuestión:



El sistema de numeración romano también es una variante de un sistema de numeración no posicional, aunque es un poco más complejo, ya que en determinadas situaciones, además de sumar, se permite hacer algunas restas. Dado que las reglas y limitaciones que presenta este sistema son un poco largas, nos limitaremos a dar una tabla de valores y poner algunos ejemplos:

Valor	1	5	10	50	100	500	1.000
Letra	I	V	X	L	C	D	M

45 = XLV; 1.900 = MCM; 2.013 = MMXIII…

02 / 100

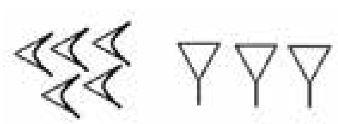
SISTEMAS DE NUMERACIÓN. SISTEMAS POSICIONALES

Siguiendo con los sistemas de numeración, debemos añadir que los sistemas no posicionales presentan dos inconvenientes importantes. El primero es que para escribir números grandes debemos acumular muchos símbolos o inventar símbolos nuevos que pueden no ser fáciles de memorizar. Y, en segundo lugar, se hace complicado operar con los números expresados de esta forma, ya que no hay algoritmos eficientes para hacerlo.

Los sistemas posicionales solucionan estos dos problemas. Como ya hemos indicado en el capítulo anterior, en los sistemas posicionales, el valor de cada una de las cifras viene dado por dos componentes: el símbolo utilizado y su posición dentro del número. De hecho, como bien sabes, en el número 1.321.651 la cifra 1 posee tres valores diferentes según sea su posición dentro del número: 1.000.000, 1.000 y 1.

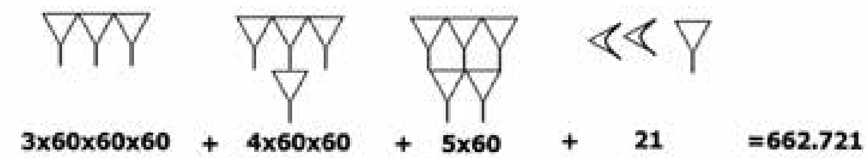
El primer sistema posicional del que se tiene noticia es el sistema babilónico, que utilizaba solamente dos símbolos (que se realizaban utilizando la escritura cuneiforme):

Para escribir números inferiores a 60 se acumulaban estos símbolos y se iban sumando sus respectivos valores. Así, para escribir el número 53 escribían:



Para números mayores que 59, el sistema ya era posicional y el valor de cada símbolo valía 60, 60 x 60 = 3.600, 60 x 60 x 60 = 216.000, etc., dependiendo de la posición en la que se encontraba dentro del número (en este caso, decimos que se trata de un sistema en base 60).

Por ejemplo, dado que 662.721 = 3 x 216.000 + 4 x 3.600 + 5 x 60 + 21, utilizando el sistema babilónico, el número 662.721 se escribiría de la siguiente forma:



Además de utilizarse en Babilonia, las civilizaciones china y maya también utilizaron diferentes sistemas posicionales.

Otro sistema posicional destacado es el binario, que, de forma parecida al sistema babilónico, solamente utiliza dos cifras: 0 y 1. A nadie se le escapa que gracias a este sistema tenemos a nuestra disposición innumerables aparatos tecnológicos (ordenadores, teléfonos móviles…).

Para terminar, debemos recordar que nuestro sistema de numeración actual también es posicional de base 10. Así, cuando escribimos el número 153.234 queremos expresar:

$$\mathbf{1} \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 + \mathbf{5} \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 + \mathbf{3} \times 10 \times 10 \times 10 + \mathbf{2} \times 10 \times 10 + \mathbf{3} \times 10 + \mathbf{4} = \mathbf{1}\cdot 10^5 + \mathbf{5}\cdot 10^4 + \mathbf{3}\cdot 10^3 + \mathbf{2}\cdot 10^2 + \mathbf{3}\cdot 10 + \mathbf{4}$$

Aunque nuestro sistema de numeración se originó en India, sus grandes impulsores fueron los árabes. Posteriormente fue introducido en Europa durante el siglo XIII por Leonardo de Pisa (Fibonacci), quien demostró que era un sistema muy eficiente para operar con los números y, por lo tanto, muy útil para el comercio.

03 / 100

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

13-3-2-21-1-1-8-5
¡Diavole in Dracon!
Límala, asno.

El código Da Vinci, DAN BROWN

Empezaremos con un reto. ¿Sabrías continuar la siguiente secuencia?:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21…

Seguramente habrás acertado que cada número se obtiene sumando sus dos términos anteriores. Así, $5 = 2 + 3$, $8 = 5 + 3$, $13 = 8 + 5$, $21 = 13 + 8$. De la misma forma, el siguiente elemento de la lista será $21 + 13 = \mathbf{34}$.

Ésta no es una sucesión cualquiera, es tan especial que tiene nombre propio, se llama *sucesión de Fibonacci*. Veamos cuál es su origen y por qué es tan importante y conocida.

Su historia empieza de la mano del famoso matemático italiano que introdujo en Europa el sistema numérico actual: Leonardo de Pisa (1170-1250), más conocido como Fibonacci (el hijo de Bonacci). En el capítulo XII de su libro *Liber Abacci* propuso el siguiente problema: "Si en un patio cerrado tenemos una pareja de conejos recién nacidos y éstos originan una nueva pareja cada mes a partir del segundo, ¿cuántas parejas tendremos al cabo de 2 meses? ¿Y después de 3? ¿Y al pasar 4, 5, 6…?"

Pensando un poco podemos llegar a la conclusión de que durante el primer mes de vida habrá una sola pareja en el patio. Durante el segundo mes de vida todavía tendremos la pareja original. Durante el tercer mes de vida tendremos 2 parejas, la original y la que han tenido. Durante el cuarto mes de vida tendremos 3 parejas en el patio (la original, la primera generación que todavía no habrá engendrado y la segunda generación). Durante el quinto mes ya tendremos 5 parejas de conejos en el patio, ya que las dos primeras tendrán descendencia y la última todavía no. Si seguimos contando, nos encontraremos con la siguiente lista de números: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377…

Esta sucesión numérica es muy importante porque aparece de forma recurrente en la naturaleza. Por ejemplo, las hojas en una rama de una planta se disponen de forma que maximicen su exposición al sol, la lluvia y el aire. Esta disposición es diferente para plantas diferentes, pero siempre está relacionada con la sucesión de Fibonacci. Las escamas de las piñas o las semillas de un girasol se distribuyen formando un número de espirales que son términos de la sucesión de Fibonacci. Por ejemplo, en la mayoría de las flores de girasol aparecen 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, mientras que en otras aparecen 89 en un sentido y 144 en otro.

De la misma forma, el árbol genealógico de los abejorros en una colmena sigue al pie de la letra esta sucesión. De hecho, el macho no tiene padre, pero tiene madre. Esta madre sí tiene padres, pero solamente la madre de la abeja tiene a su vez padres. Si vamos haciendo el recuento de los antepasados de un abejorro (contándolo también a él), obtenemos: 1-1-2-3-5-8…

Todas estas misteriosas apariciones no son más que el resultado de la evolución. Así, la naturaleza ha descubierto que utilizando estos números consigue la máxima eficiencia.

Para acabar, solamente me queda añadir que en la famosa novela *El código Da Vinci*, de Dan Brown, al lado de un cadáver aparece una extraña secuencia numérica que al principio no reconocen: 13-3-2-21-1-1-8-5, junto con un par de frases que tampoco entienden: "¡Diavole in Dracon! Límala, asno".

Espero que llegados a este punto ya hayas descubierto el sentido de la secuencia numérica. Te ayudaremos con las dos frases. Son un anagrama de Leonardo da Vinci. Es decir, reordenando todas las letras de la primera frase aparece el nombre de este histórico personaje, y con las de la segunda aparece su obra más famosa: *La Mona Lisa*.